EDP DE ORDINUL AL DOILEA CVASILINIARE
CLASIFICARE ŞI FORMA CANONICĂ

O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea se numeşte **cvasiliniară** dacă este de forma:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \phi(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0 \tag{1}$$

unde $u = u(x)$ este funcţia necunoscută, iar $x = (x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n) \in I \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, I considerat maximal posibil. O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea se numeşte **liniară** dacă este de forma:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + f(x) = 0 \tag{2}$$

Clasificarea ecuaţiei (1) depinde de punctul în care se studiază. Fie $x = x_0 \in I$ fixat şi notăm $a_{ij}(x_0) = a_{ij}$, considerând astfel ecuaţia (1) ca având coeficienţii a_{ij} constanţi. Presupunem, de asemenea, că $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ pentru orice i şi j.

Se consideră forma pătratică asociată părţii principale a ecuaţiei (1) (**partea principală** a ecuaţiei este formată de termenii ce conţin derivatele de ordinul al doilea şi ea determină tipul ecuaţiei), în variabilele $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots\ ,\ \xi_n)$:

$$\varphi(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \tag{3}$$

Printr-o schimbare de variabile $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots\ ,\ \xi_n) \to \eta = (\eta_1,\ \eta_2,\ \dots\ ,\ \eta_n)$, dată de o matrice L

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

forma pătratică φ se poate aduce la o formă canonică (folosind, de exemplu, metoda lui Gauss):

$$\varphi(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i^2. \tag{5}$$

REMARCĂ

• În general, pentru o formă pătratică pe un spaţiu vectorial (real sau complex), numărul de pătrate care apar în expresia (5) cu coeficienţi λ_i nenuli coincide cu rangul r al formei pătratice φ, unde r = rangul matricei asociate formei φ), fiind invariant la transformări de coordonate (schimbări de bază).

• Pentru forme pătratice pe spaţii vectoriale reale, numărul de pătrate care apar în expresia (5) cu coeficienţi λ_i pozitivi se numeşte *indicele pozitiv de inerţie*, p şi este invariant (acelaşi pentru orice formă canonică de tipul (5)). Rezultă că şi $r - p =$ *indicele negativ de inerţie* este invariant. De asemenea, există o unică formă canonică de tipul (5) cu $\lambda_i \in \{1,\ -1,\ 0\}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

CLASIFICARE

• Dacă $r = n$ şi toţi coeficienţii λ_i au acelaşi semn ($\Leftrightarrow p = n$ sau $p = 0$) atunci ecuaţia (1) este **de tip eliptic**.

• Dacă $r = n$ şi coeficienţii λ_i au semne diferite ($\Leftrightarrow 1 \leq p \leq n-1$) atunci ecuaţia (1) este **de tip hiperbolic**.

• Dacă $r < n$ atunci ecuaţia (1) este **de tip parabolic**.

OBSERVAŢIE Dacă ecuaţia (1) nu are coeficienţi constanţi atunci ea poate fi de tip mixt. De exemplu, ecuaţia lui Tricomi

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

unde $u = u(x, y)$, este de tip eliptic pentru $y > 0$ şi de tip hiperbolic pentru $y < 0$.

EXEMPLE CLASICE: ecuaţia căldurii, ecuaţia undelor, ecuaţia lui Laplace.

REMARCĂ
Folosind schimbarea de variabile $x = (x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n) \to y = (y_1,\ y_2,\ \dots\ ,\ y_n)$, definită prin

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tL \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

unde ${}^tL$ este transpusa matricei L din (4), se poate găsi **forma canonică a ecuaţiei** (1) în cazul coeficienţilor constanţi ($a_{ij}(x) = a_{ij}$ pentru orice x):

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_i^2} + \omega(y,\ \tilde{u},\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i}) = 0 \tag{7}$$

unde $\tilde{u} = \tilde{u}(y)$ este funcţia necunoscută în noile coordonate.

NOTAŢII: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

EXERCIŢII

1. Să se determine tipul şi forma canonică a ecuaţiilor, precizând şi transformarea prin care se aduce la foma canonică:

1.1. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$

1.2. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$

1.3. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0$

1.4. $2u_{xx} + 3u_{yy} + 13u_{zz} - 2u_{xz} + 12u_{yz} = 0.$

EDP DE ORDINUL AL DOILEA CVASILINIARE ÎN DOUĂ VARIABILE

Pentru $n = 2$ se renotează variabilele funcţiei $u = u(x, y)$ şi coeficienţii ecuaţiei (1) astfel:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \phi(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y) = 0. \qquad (8)$$

unde $a,\ b,\ c$ sunt funcţii reale de variabile reale $(x, y) \in D$, cu $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ în D, D fiind un domeniu din $\mathbf{R}^2$. Atunci, ecuaţia (8) este (într-un punct sau într-un domeniu):
(i) de tip **hiperbolic** dacă $b^2 - ac > 0$;
(ii) de tip **parabolic** dacă $b^2 - ac = 0$;
(iii) de tip **eliptic** dacă $b^2 - ac < 0$.

Determinarea transformării prin care ecuaţia (8) se poate aduce la forma canonică, se face cu ajutorul **ecuaţiei caracteristicilor**, care se scrie sub formă diferenţială:

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)(dx)(dy) + c(x,y)(dx)^2 = 0. \qquad (9)$$

În fiecare dintre cele trei cazuri, se face o schimbare de variabile $(x, y) \to (\alpha, \beta)$, dată de

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta) \qquad (10)$$

care este nedegenerată, adică are determinantul funcţional $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} \neq 0$, ceea ce permite inversarea formulelor de transformare (10):

$$\alpha = \alpha(x, y), \quad \beta = \beta(x, y), \qquad (11)$$

având, evident, şi

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vom nota tot cu u funcţia $\tilde{u} = \tilde{u}(\alpha,\beta)$ în noile variabile.

(i) Dacă $b^2 - ac > 0$ atunci din (9) se obţin două integrale generale distincte $\varphi(x,y) = c_1$ şi $\psi(x,y) = c_2$, ce determină două familii distincte de caracteristici reale ale ecuaţiei (8), unde $c_1,\ c_2$ constante, $\varphi,\ \psi$ funcţii reale. Definind transformarea (11) prin

$$\alpha = \varphi(x,y), \quad \beta = \psi(x,y) \tag{12}$$

se aduce ecuaţia (8) la forma

$$u_{\alpha\beta} + \tilde{\phi}(\alpha,\ \beta,\ u,\ u_\alpha,\ u_\beta) = 0$$

numită *prima formă canonică a tipului hiperbolic.*
Se observă că efectuând schimbarea de variabile $(\alpha,\beta) \to (\gamma,\delta)$ definită prin

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta), \qquad \delta = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

ecuaţia devine

$$u_{\gamma\gamma} - u_{\delta\delta} + \tilde{\tilde{\phi}}(\gamma,\delta,u,u_\gamma,u_\delta) = 0$$

numită *a doua formă canonică a tipului hiperbolic.*

(ii) Dacă $b^2 - ac = 0$ atunci din (9) se obţine o singură familie de caracteristici $\varphi(x,y) = c_1$. Se alege $\psi(x,y)$ astfel încât să avem o schimbare de variabile de forma (12). Ecuaţia (8) devine

$$u_{\beta\beta} + \tilde{\phi}(\alpha,\ \beta,\ u,\ u_\alpha,\ u_\beta) = 0$$

numită *forma canonică a tipului parabolic.*

(iii) Dacă $b^2 - ac < 0$ atunci integrala generală a ecuaţiei (9) se poate scrie $\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = c$ (c=constantă), unde φ şi ψ sunt funcţii reale ce vor fi folosite în schimbarea de variabilă (12) pentru a aduce ecuaţia (8) la forma

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \tilde{\phi}(\alpha,\ \beta,\ u,\ u_\alpha,\ u_\beta) = 0$$

numită *forma canonică a tipului eliptic.*

REMARCĂ: O ecuaţie poate fi de tipuri diferite în domenii diferite, dacă $b^2 - ac$ îşi schimbă semnul. Domeniile de elipticitate şi hiperbolicitate sunt separate de curbe limită pe care $b^2 - ac = 0$, formate din puncte de parabolicitate.

EXERCIŢII

2. Să se determine tipul şi forma canonică a ecuaţiilor folosind metoda caracteristicilor:

2.1. $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_y = 0$

2.2. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$

2.3. $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} - u_x = 0.$

3. Să se studieze tipul ecuaţiei:

$$(x+4)u_{xx} - 2(y^2 + x^2 - 2x)u_{xy} + x(x^2 + y^2 - 2x)u_{yy} = 0.$$

4. Să se determine tipul şi forma canonică a ecuaţiei în domeniile în care se păstrează tipul:

4.1. $u_{xx} - xu_{yy} = 0$

4.2. $u_{xx} - yu_{yy} = 0$

4.3. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$

4.4. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0$

5. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii:

5.1. $u_{xy} = 0$

5.2. $u_{xx} - a^2u_{yy} = 0$, unde $a > 0$.

5.3. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$

5.4. $u_{xy} + au_x = 0$

5.5. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 0.$

REFERINŢE:

V. S. Vladimirov şi alţii - Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice, Ed. Ştinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.

N. Teodorescu, V Olariu, Ecuaţiile fizicii matematice, EDP, Bucureşti, 1975.