**ECUAŢIILE FIZICII MATEMATICE**

**FIŞE DE SEMINAR**

CUPRINS:

## EDP DE ORDINUL AL DOILEA CVASILINIARE
## CLASIFICARE ŞI FORMA CANONICĂ

**O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea** se numeşte **cvasiliniară** dacă este de forma:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \phi(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0 \tag{1}$$

unde $u = u(x)$ este funcţia necunoscută, iar $x = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \in I \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$.
O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea se numeşte **liniară** dacă este de forma:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + f(x) = 0 \tag{2}$$

**Clasificarea** ecuaţiei (1) depinde de punctul în care se studiază. Fie $x = x_0 \in I$ fixat şi notăm $a_{ij}(x_0) = a_{ij}$, considerând astfel ecuaţia (1) ca având coeficienţii $a_{ij}$ constanţi. Presupunem, de asemenea, că $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ pentru orice $i$ şi $j$.

Se consideră **forma pătratică** asociată părţii principale a ecuaţiei (1) (**partea principală** a ecuaţiei este formată de termenii ce conţin derivatele de ordinul al doilea şi ea determină tipul ecuaţiei), în variabilele $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_n)$:

$$\varphi(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \tag{3}$$

Printr-o schimbare de variabile $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_n) \to \eta = (\eta_1,\ \eta_2,\ \dots,\ \eta_n)$, dată de o matrice $L$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

forma pătratică $\varphi$ se poate aduce la o formă canonică (folosind, de exemplu, metoda lui Gauss):

$$\varphi(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i^2. \tag{5}$$

**OBSERVAŢII:**

• În general, pentru o formă pătratică pe un spaţiu vectorial (real sau complex), numărul de pătrate care apar în expresia (5) cu coeficienţi $\lambda_i$ nenuli coincide cu rangul $r$ al formei pătratice $\varphi$, unde $r$ = rangul matricei asociate formei $\varphi$), fiind invariant la transformări de coordonate (schimbări de bază).

• Pentru forme pătratice pe spaţii vectoriale reale, numărul de pătrate care apar în expresia (5) cu coeficienţi $\lambda_i$ pozitivi se numeşte *indicele pozitiv de inerţie*, $p$ şi este invariant (acelaşi pentru orice formă canonică de tipul (5)). Rezultă că şi $r - p$ = *indicele negativ de inerţie* este invariant. De asemenea, există o unică formă canonică de tipul (5) cu $\lambda_i \in \{1, \ -1, \ 0\}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

**CLASIFICARE**

• Dacă $r = n$ şi toţi coeficienţii $\lambda_i$ au acelaşi semn ($\Leftrightarrow p = n$ sau $p = 0$) atunci ecuaţia (1) este **de tip eliptic**.

• Dacă $r = n$ şi coeficienţii $\lambda_i$ au semne diferite ($\Leftrightarrow 1 \leq p \leq n-1$) atunci ecuaţia (1) este **de tip hiperbolic**.

• Dacă $r < n$ atunci ecuaţia (1) este **de tip parabolic**.

**OBSERVAŢIE:**
Dacă ecuaţia (1) nu are coeficienţi constanţi atunci ea poate fi de tip mixt. De exemplu, ecuaţia lui Tricomi

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

unde $u = u(x, y)$, este de tip eliptic pentru $y > 0$ şi de tip hiperbolic pentru $y < 0$.

**EXEMPLE CLASICE:**

Ecuaţia căldurii $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = F(x, t)$, unde $u = u(x, t)$, $a > 0$, este de tip parabolic.

Ecuaţia undelor $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = F(x, t)$, unde $u = u(x, t)$, $a > 0$, este de tip hiperbolic.

Ecuaţia lui Laplace $\Delta u = 0$ şi ecuaţia lui Poisson $\Delta u = F(x)$, unde $u = u(x)$, sunt de tip eliptic.

**REMARCĂ:**
Folosind schimbarea de variabile $x = (x_1, \ x_2, \ \dots, \ x_n) \to y = (y_1, \ y_2, \ \dots, \ y_n)$, definită prin

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

unde ${}^t L$ este transpusa matricei $L$ din (4),
se poate găsi **forma canonică a ecuaţiei** (1) în cazul coeficienţilor constanţi ($a_{ij}(x) = a_{ij}$ pentru orice $x$):

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_i^2} + \omega(y, \ \tilde{u}, \ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i}) = 0 \tag{7}$$

unde $\tilde{u} = \tilde{u}(y)$ este funcţia necunoscută în noile coordonate.

**NOTAŢII:** $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

**EXERCIŢII**

**1.** Să se determine tipul şi forma canonică a ecuaţiilor, precizând şi transformarea prin care se aduce la forma canonică:

**1.1.** $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$

**1.2.** $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$

**1.3.** $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0$

**1.4.** $2u_{xx} + 3u_{yy} + 13u_{zz} - 2u_{xz} + 12u_{yz} = 0.$

## EDP DE ORDINUL AL DOILEA CVASILINIARE ÎN DOUĂ VARIABILE

Pentru $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ se renotează variabilele funcţiei $u = u(x, y)$ şi coeficienţii ecuaţiei (1) astfel:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \phi(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y) = 0. \qquad (8)$$

unde $a,\ b,\ c$ sunt funcţii reale de variabile reale $(x, y) \in D$, cu $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ în $D$, $D$ fiind un domeniu din $\mathbf{R}^2$. Atunci, ecuaţia (8) este (într-un punct sau într-un domeniu):
**(i)** de tip **hiperbolic** dacă $b^2 - ac > 0$;
**(ii)** de tip **parabolic** dacă $b^2 - ac = 0$;
**(iii)** de tip **eliptic** dacă $b^2 - ac < 0$.

Determinarea transformării prin care ecuaţia (8) se aduce la forma canonică, se poate face cu ajutorul **ecuaţiei caracteristicilor**, care se scrie sub formă diferenţială:

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)(dx)(dy) + c(x,y)(dx)^2 = 0. \qquad (9)$$

În fiecare dintre cele trei cazuri, se face o schimbare de variabile $(x, y) \to (\alpha, \beta)$, dată de

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta) \tag{10}$$

care este nedegenerată, adică are determinantul funcţional $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} \neq 0$, ceea ce permite inversarea formulelor de transformare (10):

$$\alpha = \alpha(x, y), \quad \beta = \beta(x, y), \tag{11}$$

având, evident, şi

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vom nota tot cu $u$ funcţia $\tilde{u} = \tilde{u}(\alpha, \beta)$ în noile variabile.

**(i)** Dacă $b^2 - ac > 0$ atunci din (9) se obţin două integrale generale distincte $\varphi(x, y) = c_1$ şi $\psi(x, y) = c_2$, ce determină două familii distincte de caracteristici reale ale ecuaţiei (8), unde $c_1$, $c_2$ constante, $\varphi$, $\psi$ funcţii reale. Definind transformarea (11) prin

$$\alpha = \varphi(x, y), \quad \beta = \psi(x, y) \tag{12}$$

se aduce ecuaţia (8) la forma

$$u_{\alpha\beta} + \tilde{\phi}(\alpha,\ \beta,\ u,\ u_\alpha,\ u_\beta) = 0$$

numită **prima formă canonică a tipului hiperbolic**.
Se observă că efectuând schimbarea de variabile $(\alpha, \beta) \to (\gamma, \delta)$ definită prin

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \qquad \delta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

ecuaţia devine

$$u_{\gamma\gamma} - u_{\delta\delta} + \tilde{\tilde{\phi}}(\gamma, \delta, u, u_\gamma, u_\delta) = 0$$

numită **a doua formă canonică a tipului hiperbolic**.

**(ii)** Dacă $b^2 - ac = 0$ atunci din (9) se obţine o singură familie de caracteristici $\varphi(x, y) = c_1$. Se alege $\psi(x, y)$ astfel încât să avem o schimbare de variabile de forma (12). Ecuaţia (8) devine

$$u_{\beta\beta} + \tilde{\phi}(\alpha,\ \beta,\ u,\ u_\alpha,\ u_\beta) = 0$$

numită **forma canonică a tipului parabolic**.

**(iii)** Dacă $b^2 - ac < 0$ atunci integrala generală a ecuaţiei (9) se poate scrie $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c$ ($c$=constantă), unde $\varphi$ şi $\psi$ sunt funcţii reale ce vor fi folosite în schimbarea de variabilă (12) pentru a aduce ecuaţia (8) la forma

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \tilde{\phi}(\alpha,\ \beta,\ u,\ u_\alpha,\ u_\beta) = 0$$

numită **forma canonică a tipului eliptic**.

**REMARCĂ**

O ecuaţie poate fi de tipuri diferite în domenii diferite, dacă $b^2 - ac$ îşi schimbă semnul. Domeniile de elipticitate şi hiperbolicitate sunt separate de curbe limită pe care $b^2 - ac = 0$, formate din puncte de parabolicitate.

**EXERCIŢII**

**2.** Să se determine tipul şi forma canonică a ecuaţiilor folosind metoda caracteristicilor:

**2.1.** $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_y = 0$

**2.2.** $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$

**2.3.** $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} - u_x = 0$

**2.4.** $2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$

**3.** Să se studieze tipul ecuaţiei:

$$(x + 4)u_{xx} - 2(y^2 + x^2 - 2x)u_{xy} + x(x^2 + y^2 - 2x)u_{yy} = 0.$$

**4.** Să se determine tipul şi forma canonică a ecuaţiei în domeniile în care se păstrează tipul:

**4.1.** $u_{xx} - xu_{yy} = 0$

**4.2.** $u_{xx} - yu_{yy} = 0$

**4.3.** $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$

**4.4.** $u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0$

**5.** Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii:

**5.1.** $u_{xy} = 0$

**5.2.** $u_{xx} - a^2u_{yy} = 0$, unde $a > 0$.

**5.3.** $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$

**5.4.** $u_{xy} + au_x = 0$

**5.5.** $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 0$.

*REFERINŢE:*

V. S. Vladimirov şi alţii - Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
N. Teodorescu, V Olariu, Ecuaţiile fizicii matematice, EDP, Bucureşti, 1975.

## SPAŢII NORMATE
## OPERATORI LINIARI PE SPAŢII NORMATE
## SERII FOURIER

**1**. Să se arate că în orice spaţiu normat $(V, \|\cdot\|)$ bila $\bar{B}(0,1) = \{x \in V| \ \|x\| \leq 1\}$ este convexă: $x, y \in \bar{B}(0,1) \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in \bar{B}(0,1)$ pentru orice $\alpha \in [0,1]$.

**2**. **a**) Să se arate că

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad si \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

sunt norme pe $\mathbf{K}^n$, unde $x = (x_1, \ ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$, iar $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$.
**b**) Să se deseneze $\bar{B}(0,1) \subset \mathbf{R}^2$ în raport cu $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ şi respectiv $\|\cdot\|_2$, unde $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ pentru $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.
**c**) Să se arate că $\|x\| = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\ )^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, nu defineşte o normă pe $\mathbf{R}^2$.

**3**. **i**) Să se arate că

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

este normă pe spaţiul $\mathcal{C}[a,b]$ (spaţiul funcţiilor continue pe $[a,b]$).
**ii**) Să se arate că

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{C}^1} = |\mathbf{f}(\mathbf{a})| + \|\mathbf{f}'\|_\infty$$

defineşte o normă pe $\mathcal{C}^1[a,b]$ (spaţiul funcţiilor derivabile, cu derivata continuă).

**4**. Fie $V$ un spaţiu cu produs scalar şi $\{v_1, v_2, \ ..., v_n\} \subset V$,($n \geq 2$ natural), o familie ortogonală. Considerând norma indusă de produsul scalar să se arate că:

$$\|\sum_{k=1}^{n} v_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2$$

(*Teorema lui Pitagora*). (Indicaţie: inducţie după $n \geq 2$.)

**5**. **a**) Dacă o normă pe un spaţiu $V$, provine dintr-un produs scalar atunci ea satisface *identitatea paralelogramului*: pentru orice $x, y \in V$ se verifică

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**b**) Norma $\|\cdot\|_\infty$ pe $\mathcal{C}[a,b]$ nu provine dintr-un produs scalar. (Se arată, de exemplu, că funcţiile $f(x) = 1$ şi $g(x) = \frac{x-a}{b-a}$ nu verifică identitatea paralelogramului.)
**c**) Pe $l^p = \{x = (x_n)_{n\geq 1} | \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ norma

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

nu provine dintr-un produs scalar dacă $p \neq 2$. (Se arată, de exemplu, că $x = (1,1,0,0,...)$ şi $y = (1,-1,0,0,...)$ nu verifică identitatea paralelogramului.)
**d**) Pe $L^p[0,1]$ norma

$$\|x\|_p = (\int_0^1 |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

nu provine dintr-un produs scalar dacă $p \neq 2$.
(Se arată, de exemplu, că $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \in [0,\frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2},1] \end{array} \right\}$ şi $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in [0,\frac{1}{2}) \\ 0 & x \in [\frac{1}{2},1] \end{array} \right\}$ nu verifică identitatea paralelogramului.)

**6**. Spunem că două *norme* $\|\cdot\|$ şi $\|\cdot\|'$ (pe un spaţiu $X$) sunt *echivalente* dacă există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât $\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$ pentru orice $x \in X$. În această ipoteză să se arate că un şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ este convergent în norma $\|\cdot\|$ dacă şi numai dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent în norma $\|\cdot\|'$.

**7**. Să se arate că $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$ pentru orice $x \in \mathbf{K}^n$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$), unde, pentru $p \geq 1$ şi $x = (x_1, \ ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$ avem

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

**8**. Să se arate că $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$ pentru orice $f \in \mathcal{C}[a,b]$, dar normele $\|\cdot\|_2$ şi $\|\cdot\|_\infty$ nu sunt echivalente, unde

$$\|f\|_2 = (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

şi $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
(Indicaţie: Pentru a arăta că normele nu sunt echivalente se pot folosi funcţiile $f_n(x) = e^{nx}$.)

**9**. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}[0,1]$, definite prin

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n(x-\frac{1}{2}) & x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1] \end{array} \right\}$$

este şir Cauchy dar nu este convergent în $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_2)$.

**10**. **i**) Fie funcţionala $f : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbf{C}$, $f(x) = \int_0^1 tx(t)dt$. Să se arate că $f$ este liniară, mărginită şi să se determine $\|f\|$. Pe $\mathcal{C}[0,1]$ se consideră $\|\cdot\|_\infty$.
**ii**) Aceleaşi cerinţe pentru $f : L^1[0,1] \to \mathbf{C}$, $f(x) = \int_0^1 tx(t)dt$, în raport cu $\|\cdot\|_1$ pe $L^1[0,1]$.
**iii**) Aceleaşi cerinţe pentru $f : L^2[0,1] \to \mathbf{C}$, $f(x) = \int_0^1 tx(t)dt$, în raport cu $\|\cdot\|_2$ pe $L^2[0,1]$.
Reamintim că $\|x\|_p = (\int_0^1 |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$ pentru $x \in L^p[0,1]$, $p \geq 1$.

**11**. Fie $l^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} |\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty\}$ cu norma $\|x\|_2 = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ şi operatorul $T : l^2 \to l^2$ definit mai jos. Să se arate că $T$ este liniar şi mărginit, să se determine adjunctul său $T^*$ şi să se studieze dacă $T$ este autoadjunct, *normal* (satisface $TT^* = T^*T$) sau *unitar* ($TT^* = T^*T = Id_{l^2}$).

**i**) $T(x) = (\frac{n-1}{n}x_n)_{n\geq 1}$ pentru orice $x = (x_n)_{n\geq 1}$;

**ii**) $T(x) = (i^n x_n)_{n\geq 1}$ pentru orice $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $(i^2 = -1)$;

**iii**) $T(x) = (x_{n+1})_{n\geq 1}$ pentru orice $x = (x_n)_{n\geq 1}$.

**12**. Să se arate că operatorul $T : X \to X$, definit prin $Tx(t) = tx(t)$ pentru orice $x \in X$ este liniar şi mărginit şi să se determine norma sa, în următoarele situaţii:
**i**) $X = \mathcal{C}[0,1]$ împreună cu norma $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$, $x \in \mathcal{C}[0,1]$.
**ii**) $X = L^2[0,1]$ împreună cu norma $\|x\|_2 = (\int_0^1 |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ pentru $x \in$

$L^2[0,1]$. În acest caz să se arate că $T$ este autoadjunct.
(Indicaţie: Pentru a minora $\|T\|$ în cazul ii) se pot folosi funcţiile $x_n(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \in [0, 1-\frac{1}{n}) \\ n^{\frac{1}{2}} & t \in [1-\frac{1}{n}, 1] \end{array} \right\}$.)

**13**. Să se arate că operatorul
**i**) $T : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $Tx(t) = x'(t)$ pentru orice $x \in \mathcal{C}^1[0,1]$, este liniar dar nu este mărginit (continuu).
**ii**) $T : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \to (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $Tx(t) = x'(t)$ pentru orice $x \in \mathcal{C}^1[0,1]$, este liniar şi mărginit. În acest caz să se determine $\|T\|$.

**14**. Fie $H$ un spaţiu Hilbert complex şi $T : H \to H$ un operator liniar şi mărginit. Să se arate că $T$ este autoadjunct dacă şi numai dacă $< T(x), x > \in \mathbf{R}$ pentru orice $x \in H$.

**15**. **i**) Să se arate că funcţiile $\{1,\ \cos(n\pi x),\ \sin(n\pi x)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ formează o familie ortogonală în raport cu produsul scalar asociat normei $\|\cdot\|_2$ pe $L^2[-1,1]$: $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Să se determine normele vectorilor din această familie.
**ii**) Considerăm funcţia continuă pe porţiuni $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -1-x & x \in [-1,0) \\ 0 & x = 0 \\ 1-x & x \in (0,1] \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x)$$

Să se verifice prin calcul direct că $< f, \sin(n\pi x) >= \frac{2}{n\pi}$, $\|f\|_2^2 = \frac{2}{3}$ şi să se scrie identitatea Parseval corespunzătoare dezvoltării în serie Fourier (trigonometrică) de mai sus.

**16**. Să se dezvolte în serie Fourier- trigonometrică funcţia $f$ definită mai jos şi să se scrie identitatea Parseval corespunzătoare.

**i**) $f : [-l, l] \to \mathbf{R}$ $(l > 0)$, definită prin $f(x) = x^a$, $x \in [-l, l]$, pentru cazurile particulare $a = 1$, $a = 2$ şi $a = 3$.

**ii**) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = |\sin x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

**iii**) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\pi^2x-x^3$, $x\in[-\pi,\pi]$. În acest caz să se deducă identitatea: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

**17**. **i**) Să se dezvolte funcţia $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$, în serie Fourier de "cosinusuri".
**ii**) Să se dezvolte funcţia $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos x$, în serie Fourier de "sinusuri".

## PROBLEME STURM-LIOUVILLE
## PROBLEME MIXTE

**1. i)** Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători, pentru problema Sturm-Liouville:

$$-v'' = \lambda v,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ v'(0) = 0,\ v(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

**ii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$w_t = w_{xx} + 6w,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$w_x|_{x=0} = 0,\ w|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ w|_{t=0} = 2\cos x \cos 2x.$$

**iii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$u_t = u_{xx} + 6u + 2t - 6t^2 - 6x + 2\cos x \cos 2x,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$u_x|_{x=0} = 1,\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + \frac{\pi}{2},\ u|_{t=0} = x.$$

(Indicaţie: se pot omogeniza condiţiile la limită prin schimbarea de funcţie $u \to h, u = h + x + t^2$.)

**2. i)** Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători, pentru problema Sturm-Liouville:

$$-v'' = \lambda v,\ x \in (0, \pi),\ v'(0) = 0,\ v'(\pi) = 0.$$

**ii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$h_t = h_{xx} + 4h + 2\cos^2 x,\ t > 0,\ x \in (0, \pi),$$

$$h_x|_{x=0} = 0,\ h_x|_{x=\pi} = 0,\ h|_{t=0} = 0.$$

**iii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x,\ t > 0,\ x \in (0, \pi),$$

$$u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi t,\ u|_{t=0} = 0.$$

(Indicaţie: schimbarea de funcţie $u = h + tx^2$ conduce la problema de la punctul **ii)**.)

**3. i)** Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători, pentru problema (de tip Sturm-Liouville):

$$v'' - 2v' + (1-\lambda)v = 0,\ x \in (0,\pi),\ v(0) = 0,\ v(\pi) = 0.$$

**ii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$h_t - h_{xx} + 2h_x - h = e^x \sin x,\ t > 0,\ x \in (0,\pi),$$

$$h|_{x=0} = 0,\ h|_{x=\pi} = 0,\ h|_{t=0} = e^x \sin 2x.$$

**iii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t,\ t > 0,\ x \in (0,\pi),$$

$$u|_{x=0} = 1 + t,\ u|_{x=\pi} = 1 + t,\ u|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x.$$

(Indicaţie: schimbarea de funcţie $u = h + t + 1$ conduce la problema de la punctul **ii)**.)

**4. i)** Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători, pentru problema Sturm-Liouville:

$$-v'' = \lambda v,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ v(0) = 0,\ v'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

**ii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$h_{tt} - h_{xx} - 2h_t = 4t \sin x,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$h|_{x=0} = 0,\ h_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ h|_{t=0} = 0,\ h_t|_{t=0} = \sin x.$$

**iii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x),\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$u|_{x=0} = 3,\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + t,\ u|_{t=0} = 3,\ u_t|_{t=0} = x + \sin x.$$

(Indicaţie: schimbarea de funcţie $u = h + x(t^2 + t) + 3$ conduce la problema de la punctul **ii)**.)

**5.** **i)** Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători, pentru problema Sturm-Liouville:

$$-v'' = \lambda v,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ v'(0) = 0,\ v(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

**ii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$h_{tt} - h_{xx} + 2h_t = 8h + \cos 3x,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$h_x|_{x=0} = 0,\ h|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ h|_{t=0} = 0,\ h_t|_{t=0} = 0.$$

**iii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 8u + 2x(1 - 4t) + \cos 3x,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$u_x|_{x=0} = t,\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi t}{2},\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = x.$$

(Indicaţie: schimbarea de funcţie $u = h + xt$ conduce la problema de la punctul **ii)**.)

**6.** **i)** Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători, pentru problema Sturm-Liouville:

$$-v'' = \lambda v,\ x \in (0, l),\ v(0) = 0,\ v(l) = 0.$$

**ii)** Fie funcţia $g : [0, l] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x(l - x)$. Să se dezvolte $g$ în serie Fourier în raport cu baza Hilbert din $L^2[0, l]$, corespunzătoare problemei Sturm-Liouville de la punctul **i)**.
**iii)** Să se rezolve problema mixtă (pentru $b$ o constantă dată):

$$u_{tt} = u_{xx} + 2b,\ t > 0,\ x \in (0, l),$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=l} = 0,\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

(Indicaţie: se poate rezolva fie folosind Principiul lui Duhamel, fie prin schimbarea de funcţie $u = h + bx(l - x)$.)

**7. i)** Să se rezolve problema mixtă:

$$w_t = w_{xx} + w,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$w|_{x=0} = 0,\ w_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ w|_{t=0} = 2\sin 2x \cos x.$$

**ii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1,\ u|_{t=0} = x.$$

(Indicaţie: se pot omogeniza condiţiile la limită prin schimbarea de funcţie $u \to h, u = h + x$.)

**8. i)** Să se rezolve problema mixtă:

$$h_{tt} - h_{xx} + 2h_t = 8e^t \cos x,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$h_x|_{x=0} = 0,\ h|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ h|_{t=0} = \cos x,\ h_t|_{t=0} = 0.$$

**ii)** Să se rezolve problema mixtă:

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x,\ t > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$u_x|_{x=0} = 2t,\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t,\ u|_{t=0} = \cos x,\ u_t|_{t=0} = 2x.$$

(Indicaţie: schimbarea de funcţie $u = h + 2tx$ conduce la problema de la punctul **i)**.)

REFERINŢĂ:

V. S. Vladimirov, *A Collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1986
(problemele 20.46.3, 20.45.5, 20.45.6, 20.16.2, 20.16.5, 20.6.1, 20.45.4 şi respectiv 20.16.1).

## POLINOAME ORTOGONALE (LEGENDRE ŞI HERMITE)

**1.** Să se ortogonalizeze (folosind procedeul Gram-Schmidt) şirul $\{1, X, X^2, X^3\}$ în spaţiul $L^2_\omega(I)$ cu produsul scalar $< f, g >_\omega = \int\limits_I \omega(x)f(x)\overline{g(x)}dx$ pentru:
i) $I = [-1, 1]$ şi $\omega(x) = 1 \ \forall x \in I$;
ii) $I = (-\infty, +\infty)$ şi $\omega(x) = e^{-x^2} \ \forall x \in I$.

**2.** Folosind funcţia generatoare a polinoamelor Legendre

$$\psi(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1$$

să se arate că:

i) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ pentru orice $x \in [-1, 1]$ şi orice $n \geq 0$,

ii) $P_n(1) = 1$ pentru orice $n \geq 0$,

iii) Pentru orice $n \geq 0$ avem $P_{2n+1}(0) = 0$ şi

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

**3.** Folosind funcţia generatoare a polinoamelor Legendre să se deducă următoarele relaţii de recurenţă, pentru orice $n \geq 1$:

i) $(n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)xP_n + nP_{n-1} = 0$;

ii) $P_n = P'_{n+1} - 2xP'_n + P'_{n-1}$;

iii) $P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n + 1)P_n$.

**4.** Să se dezvolte în serie Fourier-Legendre funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin:

i) $f(x) = 3$ pentru $x \in [-1, 0)$ şi $f(x) = -2$ pentru $x \in [0, 1]$.
ii) $f(x) = |x|$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.
iii) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.

**5.** Să se calculeze primele 5 polinoame Legendre folosind:
i) formula lui Rodrigues;
ii) relaţia de recurenţă $(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$ şi ştiind că $P_0 = 1,\ P_1 = x$.

**6.** Folosind formula lui Rodrigues să se arate că $\int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx$ pentru orice $k < n$, unde $k, n \in \mathbf{N}$. Să se deducă apoi că $< P_n, P_m >= 0$ pentru orice $n \neq m$.

**7.** Folosind funcţia generatoare a polinoamelor Legendre să se arate că

$$\frac{1}{|1 - re^{i\theta}|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n$$

pentru $0 \leq r < 1$.

**8.** Să se calculeze $\int\limits_{-1}^{0} P_n(x)dx$, $\int\limits_{0}^{1} P_n(x)dx$, $\int\limits_{0}^{1} xP_n(x)dx$, $\int\limits_{-1}^{1} xP_n(x)dx$ şi $\int\limits_{0}^{1} x^2 P_n'(x)dx$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

**9.** Să se arate că $t\frac{\partial\psi}{\partial t} = (x - t)\frac{\partial\psi}{\partial x}$ şi să se deducă relaţia de recurenţă $nP_n - xP_n' + P_{n-1}' = 0$.

**10.** Să se verifice că $P_3$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$.

**11.** Să se deducă ecuaţia diferenţială a polinoamelor Legendre din relaţii de recurenţă (se pot folosi exerciţiile **3** şi **9**).

**12.** Folosind funcţia generatoare a polinoamelor Hermite

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

să se arate că:

i) $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ pentru orice $n \geq 0$ şi orice $x \in \mathbf{R}$;

ii) Pentru orice $n \geq 0$ avem $H_{2n+1}(0) = 0$ şi

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}.$$

**13.** Folosind funcţia generatoare a polinoamelor Hermite să se demonstreze următoarele relaţii de recurenţă, pentru orice $n \geq 1$:

i) $H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$;

ii) $H_n' = 2nH_{n-1}$;

iii) $\frac{d}{dx}(e^{-x^2} H_{n-1}) = -e^{-x^2} H_n$.

**14.** Să se calculeze primele 5 polinoame Hermite folosind:
i) formula lui Rodrigues;
ii) relaţia de recurenţă $H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$ şi ştiind că $H_0 = 1,\ H_1 = 2x$.

**15.** Să se dezvolte în serie Fourier-Hermite funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:
i) $f(x) = -1$ pentru $x < 0$ şi $f(x) = 1$ pentru $x \geq 0$;
ii) $f(x) = |x|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$;
iii) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 3$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

**16.** Să se obţină din funcţia generatoare a polinoamelor Hermite, dezvoltările în serie Fourier-Hermite ale funcţiilor: $e^{ax}$, $sh(ax)$, $ch(ax)$, $sin(ax)$, $cos(ax)$,unde $a > 0$, arbitrar.

**17.** Să se calculeze $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x H_n(x) H_{n+1}(x) dx$ pentru orice $n \geq 0$.

## PROBLEMA CAUCHY PENTRU ECUAŢIA CĂLDURII

Să se determine funcţia $u(x,t)$ de clasă $C^2(t>0)\cap C(t\geq 0)$, care satisface (pentru $x\in \mathbf{R}^n$ şi $t>0$) ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t)$$

şi condiţia iniţială

$$u|_{t=0} = u_0(x),$$

unde $f$ şi $u_0$ sunt funcţii date, iar $a>0$. Dacă $f\in C^2(t\geq 0)$ şi toate derivatele ei până la ordinul al doilea inclusiv, sunt mărginite în orice bandă $0\leq t\leq T$ iar $u_0\in C(\mathbf{R}^n)$ este mărginită, atunci problema Cauchy are o soluţie unică în clasa funcţiilor $u(x,t)$ mărginite în orice bandă $0\leq t\leq T$, care se exprimă prin *formula lui Poisson*:

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} u_0(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{R}^n}\frac{f(\xi,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

APLICAŢIE

Să se rezolve problema Cauchy (n=1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t, \quad u|_{t=0} = \sin x.$$

## PROBLEMA CAUCHY PENTRU ECUAŢIA UNDELOR

Să se determine funcţia $u(x,t)$ de clasă $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, care satisface (pentru $x \in \mathbf{R}^n$, $t > 0$) ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t)$$

şi condiţiile iniţiale

$$u|_{t=0} = u_0(x), \;\; \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x),$$

unde $f, u_0$ şi $u_1$ sunt funcţii date, iar $a > 0$. Dacă $f \in C^1(t \geq 0), u_0 \in C^2(\mathbf{R}), u_1 \in C^1(\mathbf{R})$, atunci (pentru $\mathbf{n = 1}$) problema Cauchy are soluţie unică exprimată prin *formula lui d'Alembert*:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_o(x+at)+u_0(x-at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

APLICAŢIE

Să se rezolve problema Cauchy (n=1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \;\; u|_{t=0} = x^2, \; \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x.$$

# FUNCŢII BESSEL

**Ecuaţia diferenţială Bessel:**

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0,$$

pentru un ordin arbitrar $\nu \in \mathbf{C}$, unde $z \in \mathbf{C}$.
**Funcţiile Bessel**, definite mai întâi de matematicianul Daniel Bernoulli şi genera-
lizate de Friedrich Bessel, sunt soluţii canonice $u(z)$ ale ecuaţiei diferenţiale Bessel. Funcţiile Bessel se mai numesc şi **funcţii cilindrice** sau **armonice cilindrice** deoarece apar în soluţia ecuaţiei lui Laplace în coordonate cilindrice.

**• Notaţii:**

$\mathbf{J}_\nu$ - **funcţia Bessel** de prima speţă, de ordinul $\nu$ (sau de indice $\nu$).
$\mathbf{N}_\nu$ - funcţia Bessel de a doua speţă, de ordinul $\nu$ (sau **funcţia Neumann**, notată uneori $\mathbf{Y}_\nu$).
$\mathbf{H}_\nu^{(1)}, \mathbf{H}_\nu^{(2)}$ - funcţiile Bessel de speţa a treia, de ordinul $\nu$, (sau **funcţiile Hankel**).

**• Funcţii Bessel:**

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}(\frac{z}{2})^{2m+\nu}, \qquad \text{unde} \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{0\};$$

$$N_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \qquad \text{pentru} \quad \nu \notin \mathbf{Z};$$

$$N_n(z) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(z) = \frac{1}{\pi}[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}|_{\nu=n}], \quad \text{pentru} \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \qquad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z).$$

• **Funcţia generatoare**

*Funcţiile Bessel de ordin întreg* sunt coeficienţii dezvoltării în serie de puteri (în raport cu variabila $t$) a funcţiei:

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n.$$

*EXERCIŢIUL 1.* Dacă $n$ este un întreg pozitiv să se arate că $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

• **Funcţia Gama:** $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$. (Această integrală, care se mai numeşte şi *integrala lui Euler de a doua speţă*, converge pentru $Re(z) > 0$.)

• **Proprietăţi ale funcţiei Gama:** (*EXERCIŢIUL 2.*)

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,
$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(n+1) = n!$,
$\Gamma(z+n) = (z+n-1)...(z+1)z\Gamma(z)$,
$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1\cdot3...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

• **Formule de recurenţă:** (*EXERCIŢIUL 3.*)

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}J_\nu(z) \tag{13}$$

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z) \tag{14}$$

$$zJ'_\nu(z) + \nu J_\nu(z) = zJ_{\nu-1}(z) \tag{15}$$

$$zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = -zJ_{\nu+1}(z) \tag{16}$$

$$[z^\nu J_\nu(z)]' = z^\nu J_{\nu-1}(z) \tag{17}$$

$$[z^{-\nu} J_\nu(z)]' = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z) \tag{18}$$

• **Expresii pentru $J_\nu(z)$, când $\nu$ este jumătatea unui întreg impar:** (*EXERCIŢIUL 4.*)

$$\mathbf{J}_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \qquad \mathbf{J}_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

$$\mathbf{J}_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}(\frac{\sin z}{z} - \cos z), \qquad \mathbf{J}_{-\frac{3}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}(\sin z + \frac{\cos z}{z}).$$

• **Reprezentări integrale** ($\nu = n$)**:** (*EXERCIŢIUL 5.*)

(a) $J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} t^{-n-1} dt.$

(b) $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(z \sin\theta - n\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta) d\theta.$

(c) $J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(z\cos\theta + n\theta)} d\theta.$

(d) $J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta) d\theta.$ (Aceasta este cunoscută ca *integrala Bessel.*)

(e) $J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\cos(uz)}{\sqrt{1-u^2}} du.$

# FUNCŢII SFERICE

**Funcţii Legendre asociate**:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

unde $P_l(x)$ este polinomul Legendre de grad $l$, iar $l$ şi $m$ sunt numere naturale.

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad |m| \le l.$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}, \quad |m| \le l, |m| \le l'.$$

**Funcţii sferice**

Fie $(x, y, z)$ coordonate carteziene şi $(r, \varphi, \theta)$ coordonate sferice astfel încât $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$.
Funcţiile sferice apar în rezolvarea ecuaţiei lui Laplace în coordonate sferice, prin metoda separării variabilelor.
Pentru fiecare $l = 0, 1, 2, ...$ funcţiile sferice de ordinul $l$, notate cu $Y_l^m$, unde $m \in \{-l, ..., -1, 0, 1, ..., l\}$, sunt liniar independente, iar combinaţiile lor liniare sunt, de asemenea, funcţii sferice de ordinul $l$. Expresia generală a unei funcţii sferice de ordinul $l$ este: $Y_l = \sum\limits_{m=-l}^{l} a_l^m Y_l^m$, unde $a_l^m$ sunt coeficienţi arbitrari.
Considerăm

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \left\{ \begin{array}{ll} P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi & , m = 0, 1, ..., l \\ P_l^{|m|}(\cos\theta)\sin|m|\varphi & , m = -1, ..., -l \end{array} \right\}$$

sau

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad -l \le m \le l.$$

$$< Y_l^m, Y_{l'}^{m'} >_{L^2(S(0,1))} = \frac{4\pi}{(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

**Problema Dirichlet relativă la sfera cu centrul în origine şi de rază** $R$: Să se determine o funcţie $u$ care verifică ecuaţia lui Laplace şi condiţia la limită $u|_{r=R} = f$, unde $f$ este o funcţie dată.

• **Soluţia problemei Dirichlet interioare** se caută sub forma:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^{l} a_l^m Y_l^m(\theta,\varphi).$$

• **Soluţia problemei Dirichlet exterioare** se caută sub forma:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} r^{-(l+1)} \sum_{m=-l}^{l} b_l^m Y_l^m(\theta,\varphi).$$

Coeficienţii $a_l^m$, respectiv $b_l^m$, se determină din condiţia la limită.

• În general, **o funcţie armonică într-o coroană sferică** $R_1 < r < R_2$, şi care ia valori date pe frontiera acestei coroane, este de forma:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (a_l^m r^l + b_l^m r^{-(l+1)}) Y_l^m(\theta,\varphi).$$

APLICAŢII

**1.(i)** Să se calculeze funcţiile sferice $Y_n^0$ pentru $n \in \{0,1,2,3\}$.
**(ii)** Să se găsească o funcţie $u$ armonică în interiorul sferei unitate şi astfel încât $u|_{r=1} = 3\cos^2\theta - 2\cos\theta$.

**2.(i)** Să se calculeze funcţiile sferice: $Y_1^1, Y_1^{-1}, Y_3^1, Y_3^{-1}$.
**(ii)** Să se găsească o funcţie $u$ armonică în exteriorul sferei unitate şi astfel încât $u|_{r=1} = \cos^2\theta \sin\theta(\sin\varphi + \cos\varphi)$.

**3.(i)** Să se calculeze funcţiile sferice: $Y_0^0, Y_2^0, Y_2^1, Y_2^{-1}$.
**(ii)** Să se găsească o funcţie $u$ armonică în interiorul coroanei sferice $1 < r < 2$ şi astfel încât $u|_{r=1} = \sin 2\theta \sin\varphi$ şi $u|_{r=2} = \sin^2\theta$.

| Polinomul | Legendre $P_n(x)$ | Cebîşev $T_n(x)$ | Laguerre $L_n(x)$ | Hermite $H_n(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| Domeniul de definiţie, ponderea | [-1,1], $\rho(x) = 1$ | [-1,1], $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | [0,∞), $\rho(x)=e^{-x}$ | (−∞,+∞), $\rho(x)=e^{-x^2}$ |
| Formula lui Rodrigues | $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ | $T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ | $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ | $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ |
| Funcţia generatoare | $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, $\|t\| < 1$ | $\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$, $\|t\| < 1$ | $\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$, $\|t\| < 1$ | $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$ |
| Relaţie de recurenţă | $(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$ | $T_{n+1} - 2xT_n + T_{n-1} = 0$ | $(n+1)L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + nL_{n-1} = 0$ | $H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$ |
| Ecuaţia diferenţială | $(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$ | $(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$ | $xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0$ | $H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$ |
| Ortogonalitate, normă | $\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$ | $\int_{-1}^{1} \frac{T_n T_m}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases}$ | $\int_{0}^{\infty} e^{-x} L_n L_m dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$ | $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n H_m dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & n = m \end{cases}$ |
| Primele 5 polinoame | $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$, $P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ | $T_0 = 1$, $T_1 = x$, $T_2 = 2x^2 - 1$, $T_3 = 4x^3 - 3x$, $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ | $L_0 = 1$, $L_1 = 1 - x$, $L_2 = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$, $L_3 = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$, $L_4 = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$ | $H_0 = 1$, $H_1 = 2x$, $H_2 = 4x^2 - 2$, $H_3 = 8x^3 - 12x$, $H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12$ |
| Alte relaţii de recurenţă | $nP_n - xP_n' + P_{n-1}' = 0$<br>$P_n' - nP_{n-1} - xP_{n-1}' = 0$<br>$P_{n+1}' - P_{n-1}' = (2n+1)P_n$ | | | $H_n' = 2nH_{n-1}$<br>$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}H_{n-1}\right) = -e^{-x^2}H_n$ |

Gheorghe Mocică – *Probleme de funcţii speciale*, Abramowitz& Stegun –*Handbook of Mathematical Functions*

…