Margini pentru rădăcinile polinoamelor cu coeficienţi complecşi

Note de Curs

Rezumat

Vom prezenta câteva rezultate asupra marginilor modulelor rădăcinilor polinoamelor într–o nedeterminată peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe.

Introducere

Una dintre principalele probleme care se pun în legătură cu polinoamele într–o variabilă (nedeterminată) o constituie găsirea rădăcinilor lor. Deoarece calcularea exactă a rădăcinilor unui polinom cu coeficienţi reali sau complecşi nu este posibilă decât pentru polinoame particulare este necesar să avem metode de aproximare a acestor rădăcini. În acest context determinarea intervalelor sau domeniilor în care se găsesc rădăcinile unui polinom cu coeficienţi reali sau complecşi permite elaborarea unor metode algoritmice de estimare a acestor rădăcini. O primă etapă constă în găsirea unor margini (superioare şi inferioare) ale valorilor absolute ale rădăcinilor. Vom descrie câteva astfel de margini superioare şi vom compara eficienţa rezultatelor. Prin considerea polinomului reciproc se pot deduce ulterior şi margini inferioare.

Marginea lui Cauchy

Matematicianul francez Augustin–Louis Cauchy a publicat în anul 1822 un criteriu simplu care permite estimarea marginilor modulelor rădăcinilor polinoamelor cu coeficienţi în corpul numereloor complexe.

Teorema 1 *Fie ρ unica rădăcină pozitivă a polinomului*

$$F(X) = X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_n|\,, \text{ unde } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Atunci toate rădăcinile polinomului $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ se găsesc în discul $\{|z| \leq \rho\}$.

Demonstraţie: În primul rând să observăm că polinomul

$$F(X) = X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}|X - |a_n|$$

are într–adevăr o singură rădăcină reală pozitivă, având toţi coeficienţii reali şi o singură schimbare de semn (regula lui Descartes a semnelor).
Consideră $z \in \mathbb{C}$, $|z| > \rho$. Avem

$$|P(z)| \;\geq\; |z|^n - \big(|a_1| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}| \cdot |z| + |a_n|\big) \;=\; F(|z|) \;>\; 0\,,$$

aşadar $P(z) \neq 0$. □

Utilizarea Metodei lui Cauchy

Procedeul lui Cauchy descris în Teorema 1 permite obţinerea unor expresii simple pentru marginea superioară a modulelor rădăcinilor în funcţie de talia coeficienţilor polinomului P. Prezentăm câteva aplicaţii ale acestui rezultat la determinarea unor margini ale radacinilor unui polinom cu coeficienţii complecşi. O primă aplicaţie este următorul rezultat obţinut chiar de A.–L. Cauchy:

Corolarul 2 *[Cauchy, 1822] Numarul $1 + M$, unde $M = \max_{i=1}^{n} |a_i|$, este o margine superioară a modulelor rădăcinilor polinomului $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[x]$.*

Demonstraţie: Cu notaţiile din Teorema 1 avem

$$\begin{aligned} F(1+M) \;&=\; (1+M)^n - \big(|a_1|(1+M)^{n-1} + \cdots + |a_n|\big) \\ &\geq\; (1+M)^n - M\,\big((1+M)^{n-1} + \cdots + 1\big) \\ &=\; (1+M)^n - M \cdot \frac{(1+M)^n - 1}{1 + M - 1} \;=\; 1 \\ &>\; 0\,. \end{aligned}$$

Prin urmare $1+M > \rho$, deci $1+M$ este o margine superioară a valorilor absolute ale rădăcinilor polinomului P. □

Exemplul 1. Să considerăm polinomul $P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 - X^2 + X - 2$. Conform rezultatului precedent se obţine marginea superioră $1 + \max\{2, 1\} = 3$.

Propoziţia 3 *Numărul $M = 2 \max_{s=1}^{n} |a_s|^{1/s}$ este o margine superioară modulelor rădăcinilor polinomului P.*

Demonstraţie: Deoarece $|a_s| \leq (M/2)^s$ se obţine

$$|a_i| \cdot M^{n-i} \;\leq\; \frac{M^n}{2^i}$$

aşadar

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot M^{n-i} \;\le\; M^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \;=\; M^n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Cu notaţiile din teorema 1 avem

$$F(M) \;=\; M^n - \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot M^{n-i} \;\ge\; M^n - M^n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \;=\; \left(\frac{M}{2}\right)^n \;>\; 0\,.$$

prin urmare M este o margine superioară a modulelor rădăcinilor. ∎

Exemplul 2. Considerând tot polinomul $P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 - X^2 + X - 2$. se obţine marginea superioară $2 \cdot \max\{2, 1\} = 4$.

Teorema 4 (Fujiwara) *Fie* $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ *un polinom neconstant cu coeficienţii numere complexe şi fie* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ *astfel încât*

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} \;\le\; 1\,.$$

Atunci numarul

$$\max_{i=1}^{n} \left(\lambda_i |a_i|\right)^{1/i}$$

este o margine superioară a modulelor rădăcinilor polinomului P*.*

Demonstraţie: Să punem $M = \max_{i=1}^{n} \left(\lambda_i |a_i|\right)^{1/i}$.

Avem $|a_i| \le \dfrac{M^i}{\lambda_i}$ pentru toţi i, deci

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|\, M^{n-i} \;\le\; \sum_{i=1}^{n} \frac{M^i}{\lambda_i} \cdot M^{n-i} \;\le\; M^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\,.$$

Prin urmare

$$F(M) \;\ge\; M^n - M^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \;=\; M^n \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right) \;>\; 0\,,$$

ceea ce demonstrează teorema. ∎

O altă aplicaţie a Teoremei 1 este

Propoziţia 5 *Fie* $\alpha > 0$, $|a_1| \le \alpha$*. Atunci*

$$\alpha + \max_{i=2}^{n} \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^{\frac{1}{i-1}}$$

este o margine superioară a modulelor rădăcinilor.

Demonstraţie: Considerând $M = \alpha + \max\limits_{i=1}^{n} \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^{1/i}$,
avem $|a_i| \leq \alpha(M-\alpha)^{i-1}$. Prin urmare

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |a_i|\, M^{n-i} &\leq \alpha \sum_{i=1}^{n} (M-\alpha)^{i-1}\, M^{n-i} \\
&= \frac{\alpha\, M^n}{M-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{M-\alpha}{M}\right)^i \\
&< \frac{\alpha\, M^n}{M-\alpha} \cdot \frac{M-\alpha}{M} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{M-\alpha}{M}} \\
&= \alpha\, M^{n-1} \cdot \frac{M}{\alpha} \\
&= M^n\,.
\end{aligned}$$

Prin urmare

$$F(M) \,\geq\, M^n - M^n \,=\, 0\,.$$

$\square$

Observaţie: În particular, dacă $a_1 = 0$ atunci numărul α din Propoziţia 5 poate fi orice număr real pozitiv.

Exemplul 3. Considerăm polinomul

$$P(X) \,=\, X^9 - 2X^8 + X^6 - 4X^4 + X - 1\,.$$

Avem $a_1 = 2$, deci putem alege orice număr $a \geq 2$. Se obţine

$$\max_{2\leq i\leq 9} \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^{1/(i-1)} \,=\, \max\left\{\frac{1}{a}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/2}, \left(\frac{4}{a}\right)^{1/4}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/7}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/8}\right\} \,=\, \left(\frac{4}{a}\right)^{1/4}.$$

Aşadar alte margini superioare sunt date de

$$M(a) \,=\, a + \left(\frac{4}{a}\right)^{1/4} \quad \text{pentru orice} \quad a \geq 2\,.$$

Alegând $a = 2$ se obţine marginea superioară

$$M(2) \,=\, 3.414\,.$$

De fapt adevărata margine superioară a modulelor rădăcinilor este 1.997 .

Marginea $R+\rho$

J.–L. Lagrange a enunţat un alt rezultat privind marginile rădăcinilor unui polinom cu coeficienţii reali (v. [4]. Îl reformulăm pentru cazul mai general al polinoamelor cu coeficienţii complecşi şi dăm o demonstraţie bazată tot pe Teorema 4 a lui Fujiwara.

Teorema 6 (Marginea $R+\rho$) *Fie $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ numere complexe. Dacă $R=|a_j|^{1/j}\geq|a_i|^{1/i}=\rho\geq|a_k|^{1/k}$ pentru toţi $k\neq i,\ j$, atunci numărul $R+\rho$ este o margine superioară a valorilor absolute ale rădăcinilor polinomului*

$$F(X)\ =\ X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n\,.$$

Demonstraţie: După Teorema 2 a lui Cauchy este suficient să arătăm că unica rădăcină reală a polinomului

$$G(X)\ =\ X^n-|a_1|X^{n-1}-\cdots-|a_{n-1}|X-|a_n|$$

este mai mică decât $R+\rho$.
Avem $R=|a_j|^{1/j}\geq|a_i|^{1/i}=\rho\geq|a_k|^{1/k}$ pentru toţi $k\neq i,j$. Căutăm acum $\lambda_1,\ldots,\lambda_n>0$ astfel încât

$$\lambda_k|a_k|\ \leq\ (R+\rho)^k\quad \text{pentru toţi}\quad k=1,2,\ldots,n\,.$$

Ar fi suficient să fie satisfăcute inegalităţile

$$\lambda_k\,\rho^k\ \leq\ (R+\rho)^k\quad \text{pentru toţi}\quad k\neq j$$

şi

$$\lambda_j\,R^j\ \leq\ (R+\rho)^j\,.$$

Alegem atunci

$$\lambda_j\ =\ \left(\frac{R+\rho}{R}\right)^j,\quad \lambda_k\ =\ \left(\frac{R+\rho}{\rho}\right)^k\quad \text{pentru}\quad k\neq j\quad (1\leq k\leq n)\,.$$

De unde

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\ &=\ \sum_{k\neq j}\frac{1}{\lambda_k}+\frac{1}{\lambda_j}\\ &=\ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\left(\frac{\rho}{R+\rho}\right)^k+\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^j\\ &=\ \frac{\rho}{R}\left(1-\left(\frac{\rho}{R+\rho}\right)^n\right)+\frac{R^j-\rho^j}{(R+\rho)^j}\ =\ \frac{\rho}{R}+\frac{R^j-\rho^j}{(R+\rho)^j}-\frac{\rho^{n+1}}{R(R+\rho)^n}\,.\end{aligned}$$

Considerăm acum $y = R/\rho$. Se observă că $y \geq 1$ şi

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{R} + \frac{R^j - \rho^j}{(R+\rho)^j} - \frac{\rho^{n+1}}{R(R+\rho)^n} &= \frac{1}{y} + \frac{y^j - 1}{(y+1)^j} - \frac{1}{y(y+1)^n} \\
&= \frac{(y+1)^n + y(y^j-1)(y+1)^{n-j} - 1}{y(y+1)^n}\,.
\end{aligned}$$

Membrul drept al ultimei inegalităţi este subunitar dacă şi numai dacă

$$g(y) \;=\; y(y+1)^n - (y+1)^n - y(y^j-1)(y+1)^{n-j} + 1 \;\geq\; 0\,.$$

Avem

$$g(y) \;=\; (y+1)^{n-j} \cdot h(y) + 1\,,$$

unde $h(y) = (y-1)(y+1)^j - y(y^j - 1)$. Este suficient să avem $h(y) \geq 0$ pentru toţi $y \geq 1$.

Într–adevăr,

$$\begin{aligned}
\frac{h(y)}{y-1} &> y^j + \left(\binom{j}{1} - 1\right) y^{j-1} + \left(\binom{j}{2} - 1\right) y^{j-2} + \cdots + \left(\binom{j}{j-1} - 1\right) y + 1 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

deoarece toate parantezele de pe ultima linie sunt pozitive. De aici avem $h(y) \geq 0$ pentru toţi $y \geq 1$.

Prin urmare $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \leq 1$. După Teorema 4 numărul $R + \rho$ este o margine superioară a modulelor rădăcinilor lui F. $\square$

Margini Inferioare

Cunoaşterea unei margini superioare pentru modulele rădăcinilor unui polinom permite calcularea imediată a unor margini inferioare. Aceasta reiese din următorul rezultat.

Propoziţia 7 *Fie $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$ iar $P^*(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ polinomul să reciproc. Dacă numărul $K > 0$ este o margine superioară a valorilor absolute ale rădăcinilor polinomului P^*, atunci numărul $1/K$ este o margine inferioară a valorilor absolute ale rădăcinilor polinomului P.*

Demonstraţie: Este suficient să observăm că are loc relaţia

$$P^*(X) \;=\; X^n \cdot P(\frac{1}{X})\,.$$

$\square$

Exemplul 4. Fie $P(X) = X^7 - X^6 + 2X^4 - 2X^3 + X + 1$.
Polinomul reciproc este $P^*(X) = X^7 + X^6 - 2X^4 + 2X^3 - X + 1$. Conform Teoremei 6 o margine superioară a modulelor rădăcinilor este

$$K = R + \rho = \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} \approx 2.449$$

Prin urmare o margine inferioară a modulelor rădăcinilor polinomului P este $m = 0.408$.

Aplicaţii

Găsirea unor limite pentru modulele rădăcinilor polinoamelor cu coeficienţi reali sau complecşi nu rezolvă imediat problema localizării rădăcinilor unor astfel de polinoame. În aplicaţii suntem interesaţi să găsim margini cât mai apropiate de acelea adevărate. De asemenea sunt de preferat procedeele care conduc la calcule ce pot fi duse la capăt în timp real — de preferat chiar cu creionul şi hârtia. Cum calculatoarele electronice de astăzi pot efectua în câteva minute - dacă nu secunde - un volum uriaş de calcule, considerăm drept eficiente şi acele procedee care permit obţinerea rezultatelor doar cu ajutorul calculatoarelor.

Exemplul 5. Fie $P(X) = X^5 - 2X^4 + 2X^2 + X - 2 \in \mathbb{C}[X]$. Atunci $M = 2$ şi după Teorema 2 obţinem marginea superioară $1 + M = 3$. În schimb Propoziţia 3 şi Teorema 6 ne dau marginea 4.

Exemplul 6. Să considerăm polinomul

$$P(X) = X^5 + 4X^3 + 100X + 99\,.$$

Teorema 2 a lui Cauchy conduce la marginea superioară

$$M_1 = 1 + \max\{4, 100, 99\} = 1 + 100 = 101\,.$$

Utilizând Propoziţia 3 se obţine

$$M_2 = 2 \cdot \max\{4^{1/2}, 100^{1/4}, 99^{1/5}\} = 2 \cdot 3.163 = 6.326\,.$$

Exemplul 7. Să considerăm polinomul

$$P(X) = X^{11} - 2X^{10} + X^9 - 2X^8 - 8X^4 + X - 1\,.$$

Cu notaţiile din Teorema 6 avem

$$R = 2 \quad \text{şi} \quad \rho \approx 1.346\,.$$

De asemenea

$$1 + \max\{|a_i|\,; 1 \le i \le 11\} = 1 + 8 = 9$$

Se obţin următoarele margini superioare:

9	Teorema 2
4	Propoziţia 3
3.346	Teorema 6

Alte margini superioare pentru valorile absolute ale rădăcinilor se pot obţine folosind Propoziţia 5. În cazul polinomului P avem $a_1 = 2$, deci putem alege orice număr $a \geq 2$. Se obţine

$$\max_{2\leq i\leq 11} \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^{1/(i-1)} = \max\left\{\frac{1}{a}, \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}, \left(\frac{8}{a}\right)^{1/6}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/9}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/10}\right\} = \left(\frac{8}{a}\right)^{1/6}.$$

Aşadar alte margini superioare sunt date de

$$M(a) = a + \left(\frac{8}{a}\right)^{1/6} \quad \text{pentru orice} \quad a \geq 2\,.$$

Funcţia $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ g(x) = x + (8/x)^{1/6}$ fiind crescătoare cea mai bună margine obţinută prin Propoziţia 5 este

$$M(2) = 3.259\,.$$

Prin urmare Teorema 6 şi Propoziţia 5 dau cele mai bune margini pentru polinomul P.

Prin utilizarea unui pachet de programe performant, cum este `gp-pari` (v. [8]), se constată că modulul maxim al unei rădăcini este 2.079 .

Concluzii

Marginile valorilor absolute ale rădăcinilor polinoamelor intr–o nedeterminată cu coeficienţii numere complexe pot fi calculate în funcţie de grad şi coeficienţi prin metode simple. Printre cele mai eficiente sunt marginea $R + \rho$ a lui Lagrange şi marginile lui Fujiwara. Cunoaşterea acestor margine reprezintă un pas important pentru calcularea rădăcinilor ecuaţiilor algebrice.

Bibliografie

[1] A.–L. Cauchy: *Exercices de Mathématiques*, t. 4, Paris (1829).

[2] L. Panaitopol, I. C. Drăghicescu: *Polinoame şi ecuaţii algebrice*, Editura Albatros (1980).

[3] M. Fujiwara: Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, *Tôhoku Math. J.*, **10**, 167–171 (1916).

[4] J.–L. Lagrange: *Traité de la résolution des équations numériques*, Paris (1798).

(Reprinted in *Œuvres*, t. VIII, Gauthier–Villars, Paris (1879).)

[5] M. Mignotte, D. Ştefănescu: *Polynomials — An algorithmic approach*, Springer Verlag (1999).

[6] M. Mignotte: Computer Algebra — O introducere în algebra computaţională, Editura Universităţii din Bucuresşti (2000).

[7] D. Ştefănescu: Inequalities on polynomial roots, *Math. Ineqs. Appl.*, **5**, 335–347 (2002).

[8] `gp-pari`, http://pari.math.u-bordeaux.fr/downloads.