Calcularea numerică a valorilor proprii

Doru Ştefănescu

Note de curs

Introducere

Vom descrie mai multe metode de calculare a valorilor proprii ale unei matrici şi vom discuta conexiunile cu alte probleme.

Reminder despre ecuaţia coardei

Vibrarea unei coarde, fixată la ambele capete şi supusă unei tensiuni uniforme, este descrisă de ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \;=\; \frac{T}{\mu(x)}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \tag{1}$$

unde T este tensiunea din coardă iar $\mu(x)$ este masa coardei pe unitatea de lungime.

Căutând soluţii de forma

$$u(x,t) \;=\; y(x)\tau(t)$$

se obţine ecuaţia

$$\frac{1}{y(x)}\,\frac{T}{\mu(x)}\,\frac{d^2y}{dx^2} \;=\; \frac{1}{\tau(t)}\,\frac{d^2\tau}{dt^2}\,.$$

Aceasta este satisfăcută pentru orice x şi t doar dacă ambii membri sunt egali cu o constantă, pe care o vom nota $-\omega^2$. Prin urmare se obţin două ecuaţii:

$$\frac{1}{y(x)}\,\frac{d^2\tau}{dt^2} \;=\; -\omega^2 \tag{2}$$

şi

$$\frac{1}{y(x)}\,\frac{T}{\mu(x)}\,\frac{d^2y}{dx^2} \;=\; -\omega^2\,. \tag{3}$$

Pentru ecuaţia (2), după ce o rescriem sub forma

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \omega^2\,\tau \;=\; 0\,,$$

obţinem soluţia

$$\tau(t) \;=\; a\,\sin\omega t + b\,\cos\omega t\,.$$

Constanta ω este o frecvenţă unghiulară exprimată în radiani/secundă şi este legată de frecvenţa simplă, care are drept unităţi ccili/secundă, prin relaţia

$$\omega \;=\; 2\pi\,\nu\,.$$

Ecuaţia (3) poate fi rescrisă

$$\frac{T}{\mu(x)}\,\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \omega^2 y(x) \;=\; 0\,. \qquad (4)$$

Coarda vibrantă neuniformă

În cazul coardei cu vibraţii neuniforme să rezolvăm problema deplasării coardei f pe o reţea cu $N+1$ noduri x echidistant distribuite. Înlocuind derivatele de ordinul doi din ecuaţia (4) cu aproximarea lor prin diferenţe finite, se obţin următoarele ecuaţii cu diferenţe finite:

$$\frac{T}{\mu_i}\,\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + \omega^2 f_i \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1\,. \qquad (5)$$

În ecuaţiile precedente punctele interioare $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{N-1}$ sunt necunoscute. Vom considera $f_0 = f_N = 0$. Deoarece avem

$$\frac{T}{h^2\mu_i} f_{i-1} - 2\frac{T}{h^2\mu_i} f_i + \frac{T}{h^2\mu_i} f_{i+1} \;=\; -\omega^2 f_i$$

se ajunge la ecuaţia matricială

$$\begin{pmatrix} -2\dfrac{T}{h^2\mu_1} & \dfrac{T}{h^2\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{T}{h^2\mu_2} & -2\dfrac{T}{h^2\mu_2} & \dfrac{T}{h^2\mu_2} & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \dfrac{T}{h^2\mu_{N-2}} & -2\dfrac{T}{h^2\mu_{N-2}} & \dfrac{T}{h^2\mu_{N-2}} \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{T}{h^2\mu_{N-1}} & -2\dfrac{T}{h^2\mu_{N-1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix},$$

care este o ecuaţie matricială de tipul

$$A\mathbf{x} \;=\; -\omega^2\mathbf{x}\,,$$

adică o problemă de vectori şi valori proprii.

Metoda puterilor

Ne propunem să calculăm (de fapt să evaluăm) valoarea proprie dominantă a unei matrici A. Ipotezele sunt

1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. $Au_j = \lambda_j u_j$ pentru toţi $i = 1, 2, \ldots, n$.
3. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.

Fie $x \in \mathbb{C}^n$ şi să–l reprezentăm în raport cu baza (formată din vectori proprii) u_1, u_2, $\ldots$, u_n. Aşadar $x = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j$. Aplicând matricea (operatorul liniar) A acestei relaţii se obţine

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j=1}^{n} a_j A u_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j u_j \,. \end{aligned}$$

După m aplicări succesive ale lui A se obţine

$$\begin{aligned} A^m x &= \sum_{j=1}^{n} a_j A^m u_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j^m u_j \\ &= \lambda_1^m \left(a_1 u_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j \big(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\big)^m u_j \right) \,. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$||A^m x|| \,=\, |\lambda_1|^m \, ||a_1 u_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j \big(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\big)^m u_j|| \,.$$

Cum λ_j/λ_1 este subunitar se obţine

$$\lim_{m \to \infty} \frac{||A^{m+1}x||}{||A^m x||} \,=\, |\lambda_1| \frac{||a_1 u_1||}{||a_1 u_1||} \,=\, |\lambda_1| \,.$$